INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modernizace studijního programu Matematika
na PřF Univerzity Palackého v Olomouci
CZ.1.07/2.2.00/28.0141

Matice a jejich aritmetika

Michal Botur

Přednáška 2

KAG/DLA1M: Lineární algebra 1

1 Matice

Aparát matic je v lineární algebře nenahraditelným nástrojem. V dalších kapitolách nám bude sloužit jak k řešení soustav lineárních rovnic, následně jej využijeme k popisu transformačních rovnic mezi soustavami souřadnic. V dalších kurzech se ukáže, že odpovídají mimořádně důležitým zobrazením mezi vektorovými prostory, které se nazývají homomorfismy.

V této přednášce si řekneme co je to matice a zvládneme sčítání a násobení matic.

V lineární algebře se budeme zabývat vektory, které byly původně zavedeny jako dvojice či trojice reálných čísel. S rozvojem fyziky vznikla i potřeba vyšších dimenzí, vektory proto byly zobecněny na n-tice reálných čísel. Dalším rozvojem vědy se vektory zobecnily na například n-tice komplexních čísel nebo na n-tice jedniček a nul. Abychom nemuseli pro každý číselný obor zavádět novou teorii, zavedl se pojem tělesa, který jsme uvedli v minulé přednášce. Zjednodušeně v celé budoucí teorii bude těleso obsahovat ty prvky, z kterých budeme „tvořit“ vektory (či matice). Pokud se kdykoliv v budoucnu budeme bavit o tělese $\mathbf{T}$, pro snazší představu si jej nahraďte tělesem $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Definice 2.1 Mějme komutativní těleso $\mathbf{T} = (T; +, \cdot)$ čísla $m, n \in \mathbb{N}$. Potom *maticí typu $m \times n$ na tělesem* $\mathbf{T}$ rozumíme schéma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

takové, že prvky $a_{ij} \in T$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}$ a $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Množinu všech matic typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ značíme $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{T})$. Jestliže se $m = n$, potom matici nazýváme *čtvercovou* a množinu všech čtvercových matic značíme $\mathcal{M}_n(\mathbf{T})$.

Příkladem matice typu 2×3 na tělesem $\mathbb{R}$ je matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \pi \\ 6 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Matici typu $m \times n$ si můžeme představit jako tabulku o m řádcích a n sloupcích do níž vepisujeme prvky z tělesa $\mathbf{T}$. Jestliže a_{ij} je prvek matice, potom i nazýváme řádkový index a j sloupcový index.

V následujícím textu schéma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nahradíme úspornějším zápisem (a_{ij}). Předpokládáme-li například, že $(c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{T})$, potom tvrdíme, že matice (c_{ij}) má m řádků, n sloupců a jejími členy jsou prvky $c_{11}, \dots, c_{mn} \in T$.

Definice 2.2 Mějme matici $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{T})$ takovou, že $A = (a_{ij})$. Potom *maticí transponovanou k matici* A rozumíme takovou matici $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbf{T})$, kde $B = b_{ji}$, že platí $a_{ij} = bji$ pro všechny indexy i a j. Obvykle potom značíme $B = A^T$.

Transponovaná matice tedy vznikne z původní matice zaměněním řádků a sloupců. Například proto platí, že

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \pi \\ 6 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} \\ \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Definice 2.3 Mějme matice $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{T})$ takové, že $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$, potom *součtem matic A a B* rozumíme matici $A + B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{T})$ takovou, že pokud označíme $A + B = (c_{ij})$, potom platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Takže součtem dvou matic (stejného typu) je matice stejného typu taková, že každý člen výsledné matice je součtem odpovídajících členů původních matic. Takže například platí

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

! Lze sčítat pouze matice stejného typu!

Věta 2.1 *Algebra $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{T}), +)$ je komutativní grupa, kde nulovým prvkem je matice obsahující samé nuly (tzv.* nulová matice typu $m \times n$*) a opačná matice k matici (a_{ij}) je matice $(-a_{ij})$.*

Kromě sčítání matic je zavedeno také jejich násobení. Zavedení této operace, stejně tak pochopení jejich vlastností je nesrovnatelně komplikovanější než v případě sčítání matic. Abychom osvětlili motivaci této definice, označme si pomocí $\mathcal{V}_n$ n-dimenzní vektorový prostor. Matice typu $m \times n$ potom odpovídají speciálním zobrazením z prostoru $\mathcal{V}_n$ do prostoru $\mathcal{V}_m$. Násobení potom představuje skládání těchto zobrazení.

Platí proto, že je-li matice A typu $m\times n$ (představuje zobrazení $\mathcal{V}_m \longrightarrow \mathcal{V}_n$) a B typu $n\times p$ (představuje zobrazení $\mathcal{V}_n \longrightarrow \mathcal{V}_p$), potom matice $A \cdot B$ bude typu $m \times p$ (představuje složení původních dvou zobrazení $\mathcal{V}_m \longrightarrow \mathcal{V}_p$).

Definice 2.4 Mějme matice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{T})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{T})$ a $C \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbf{T})$. Označme si je $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ a $C = (c_{ik})$. Potom řekneme, že *matice C je součinem matic A a B* (značíme $C = A \cdot B$), jestliže pro všechny indexy i a k platí

$$c_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

K tomu, abychom si dokázali názorněji vysvětlit, jak se násobí matice, si připomeňme, co je to skalární součin vektorů. Máme-li dva vektory stejné délky $(a_1, \ldots, a_n)$ a $(b_1, \ldots, b_n)$, potom jejich skalární součin získáme tak, že sečteme součiny odpovídajících si souřadnic vektorů. Tedy výsledek je $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Příkladem může být

$$(1, 2, 3) \cdot (1, 0, 5) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 16.$$

Máme-li matice A a B, potom člen c_{ij} jejich součinu získáme tak, že provedeme skalární součin i-tého řádku v matici A a j-tého sloupce v matici B.

V následujícím příkladu ukazujeme, že součin matic typu 4×2 a 2×3 je matice typu 4×3 a člen s indexy $3, 2$ získáme jako skalární součin třetího (červeného řádku) v první matici a druhého (modrého sloupce) v druhé matici.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -8 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Celkový součin matic potom vypadá

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -10 & -8 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Násobení matic si procvičte na příkladech matic, které si sami můžete vytvořit. Jako koeficienty v maticích si volte libovolné hodnoty (zcela stačí celá čísla od -4 do 4). Pozor na správnou volbu typů matic!

Věta 2.2 *Mějme matice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{T})$, $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbf{T})$ a $C \in \mathcal{M}_{p \times o}(\mathbf{T})$, potom platí*

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

Věta 2.3 *Struktura $(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{T}); +, \cdot)$ je okruh. Tedy platí distributivní zákony. Existuje neutrální prvek pro násobení (tzv.* jednotková matice, *kterou značíme E), matice taková, která má na hlavní diagonále 1 a na ostatních pozicích 0; tedy*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Násobení matic je korektně definovaná operace jenom na množině čtvercových matic stejného typu, proto i Věta 2.3. musí být vyslovena pro čtvercové matice!

1.1 Řádkově ekvivalentní matice, trojúhelníkový tvar

V teto sekci se naučíme techniku, která se nazývá Gaussova eliminační metoda. Protože jsme se ještě nedostali k tomu, abychom aparát matic využili, nebude nám zpočátku zřejmý její účel. Již v další přednášce, a poté ještě několikrát, využijeme tohoto postupu k řešení významných problémů.

Definice 2.5 Mějme matice $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{T})$. Potom řekneme, že matice jsou *řádkově ekvivalentní* (značíme $A \sim B$), jestliže lze matici B získat z matice A konečným počtem některých z následujících úprav

i) přehození dvou řádků,

ii) vynásobení kteréhokoliv řádku nenulovou hodnotou,

iii) přičtením libovolného násobku jednoho řádku k řádku jinému.

Tyto úpravy nazýváme *elementární řádkové transformace*.

Definice 2.6 Prvky matice, jejichž řádkový a sloupcový index se rovná, nazýváme *hlavní diagonálou*. Matice, která má pod diagonálou samé nuly se nazýva *matice v trojúhelníkovém tvaru*.

Věta 2.4 *Každá matice je řádkově ekvivalentní s některou maticí v trojúhelníkovém tvaru.*

Způsob upravování matice směrem k trojúhelníkovému tvaru se nazývá Gaussova eliminační metoda. Využíváme vlastně pouze úpravy přehození řádku a přičítání násobku řádku k jinému řádku. Myšlenkou je, že trojúhelníkového tvaru dosahujeme postupně po sloupcích tak, jak demonstruje následující příklad.

Ukažme si, jak upravit matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

na trojúhelníkový tvar. V prvním kroku Využijeme prvního řádku k vynulování členů v prvním sloupci pod hlavní diagonálo. K druhému řádku tedy přičteme -1 násobek prvního řádku a ke čtvrtému řádku přičteme -2 násobek prvního řádku. Obdržíme proto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dále pokračujeme analogicky s druhým sloupcem. Pomocí druhého řádku vynulujeme prvky druhého sloupce pod hlavní diagonálou. Ke čtvrtému řádku tedy přičteme 1 násobek druhého řádku a získáme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

V posledním kroku vynulujeme členy třetího sloupce pod hlavní diagonálou pomocí třetího řádku. Proto ke čtvrtému řádku přičteme -2 násobek třetího řádku a finálně dostáváme.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Definice 2.7 Hodnost matice rozumíme počet nenulových řádků matice s ní ekvivalentní, která je v trojúhelníkovém tvaru.

Obvykleji se hodnost matice definuje pomocí pojmů z teorie vektorových prostorů, které jsme zatím nezavedli. Pouze pro úplnost uvedeme i tuto definici.

Definice 2.8 Hodnost matice je dimenze vektorového prostoru určeného řádky matice.

Věta 2.5 *Hodnost matice i matice transponované je stejná.*

Reference

[1] D. Hort, J. Rachůnek: Algebra I., [Univerzita Palackého V Olomouci, 2003].

[2] Bican L.: Lineární algebra, [SNTL Praha, 1979.].

[3] Waerden, L.: Algebra I., [Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1971.].